Ecuaciones en diferencias (EeDs)

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Diagramas de fase, Puntos fijos y estabilidad

Diagramas de fase, Puntos fijos y estabilidad

- Partiremos estudiando la **estabilidad** de los sistemas dinámicos.
- Esto significa, si acaso los sistemas se quedan en un punto o no.
- Y si acaso el sistema dinámico se acerca o se aleja de ese punto.

Definición (Punto fijo)

Sea $x_t = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo discreto. Diremos que x^* es un punto fijo del sistema dinámico si existe $t_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $x_t = x^*$ para todo $t \geq t_0$.

En particular, si el sistema dinámico se describe por la ecuación en diferencias (EeD)

$$x_{t+k} = f(t, x_{t+k-1}, \dots, x_t)$$

y x^* es un punto fijo, entonces

$$x^* = f(t, x^*, \dots, x^*)$$

- Esta última forma de ver la definición nos dice cómo encontrar puntos fijos.
  - Basta con tomar la ecuación en diferencias, reemplazar por x^* y despejar.

Ejemplo (Punto fijo)

Pensemos en el ejemplo de la AFP, pero sin retiro y con aportes. Este sistema se caracteriza por la EeD

$$M_{t+1} = 1{,}05M_t + b$$

¿Este sistema tiene puntos fijos? Si los tiene, entonces debe ser que $M_t = M^*$ a partir de un punto, luego debería ser cierto que

$$M^* = 1{,}05M^* + b \Longrightarrow M^* = -\frac{b}{1{,}05}$$

Claramente, si $b > 0$, entonces este punto fijo no tiene mucho sentido en el contexto del problema. Sin embargo, pueden verificar que si $M_0 = M^*$, entonces $M_1 = M^*$ de acuerdo a la fórmula general que vimos anteriormente.

Ejemplo (Punto fijo)

Ahora, consideremos la EeD que determina la sucesión de Fibonacci (link)

$$F_{t+2} = F_{t+1} + F_t$$

Si un sistema dinámico que soluciona esta EeDL tuviera un punto fijo F^*, entonces

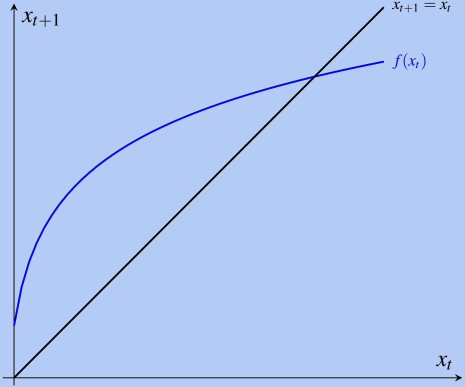
$$F^* = F^* + F^* \implies F^* = 0$$

Es decir, el único punto fijo posible es 0. ¿Para qué valores iniciales se alcanza este punto fijo? Una opción viable es definir $F_0 = F_1 = 0$, luego $F_2 = 0$ y así sucesivamente. ¿Hay otras opciones? No, pero demostrarlo no es fácil y no nos interesa en gran medida.

Ejemplo (Punto fijo)

Una característica interesante de los sistemas dinámicos que verifican EeD de orden 1 es que los podemos analizar usando diagramas de fase. Pensemos en la ecuación en diferencias $x_{t+1} = f(x_t)$ que aparece en el siguiente diagrama.

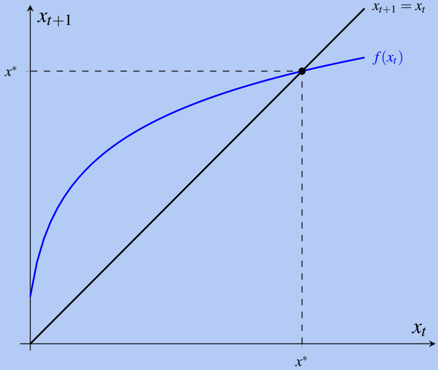
¿Existen puntos fijos? La respuesta es sí y son "simples" de ver.



Punto fijo

Ejemplo (Punto fijo)

En un punto fijo, $x_t = f(x_t)$, es decir, la curva de $f(x_t)$ y la de $x_{t+1} = x_t$ coinciden.



Ejercicio (Punto fijo)

Encuentre el punto fijo para el caso de la AFP con y sin retiros.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la siguiente EeDL:

$$x_{t+1} = ax_t + b$$

Determine qué condiciones deben cumplir a y b para que los sistemas dinámicos que las solucionen tengan un punto fijo. (*Ayuda: Tenga cuidado con los casos* $a = 1$ *y* $a \neq 1$.)

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la siguiente EeDL:

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0$$

Determine qué condición deben cumplir a_1 y a_0 para que los sistemas dinámicos que las solucionen tengan puntos fijos.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la siguiente EeDL:

$$x_{t+2} + x_{t+1} + ax_t = b$$

con $b \neq 0$. Determine para qué valores de a existe un punto fijo y para qué valores no.

Estabilidad

- Queremos ahondar en el estudio de puntos fijos.
- Como dijimos antes, nos interesa saber si nos podemos acercar a ellos.
  - O si acaso el sistema dinámico tiende a alejarse de ellos.
- Este concepto se conoce como **estabilidad**.

Definición (Estabilidad local)

Sea $x_t = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo discreto y sea x^* un punto fijo de él. Decimos que x^* es localmente estable si para cualquier valor inicial x_0 **cerca** de x^*, el sistema dinámico converge a x^* cuando $t \to \infty$. En ese caso decimos que el sistema dinámico es localmente estable.

Definición (Estabilidad global)

Sea $x_t = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo discreto y sea x^* un punto fijo de él. Decimos que x^* es globalmente estable si para cualquier valor inicial x_0, el sistema dinámico converge a x^* cuando $t \to \infty$. En ese caso decimos que el sistema dinámico es estable.

Estabilidad

- Cuando el sistema verifica una EeD de primer orden, es fácil ver estabilidad.
- Esto, porque la derivada de f tiene mucha relación con la estabilidad local.
- Veremos un resultado y a continuación un ejemplo.

Teorema (Estabilidad local)

Sea f una función continuamente diferenciable y sea x_t un sistema dinámico que satisface la siguiente EeD de primer orden

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Sea x^* un punto fijo de x_t. Entonces

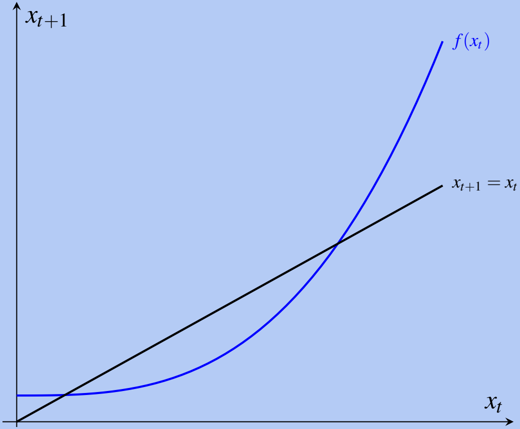
- Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es localmente estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* no es localmente estable (ni globalmente estable).

- Visualmente:
  - El primer caso ocurre si f cruza a la recta de 45º acostada.
  - El segundo caso ocurre si f cruza a la recta de 45º de forma empinada.

Ejemplo (Estabilidad local)

Consideremos el siguiente diagrama de fase representando una EeD de primer orden.

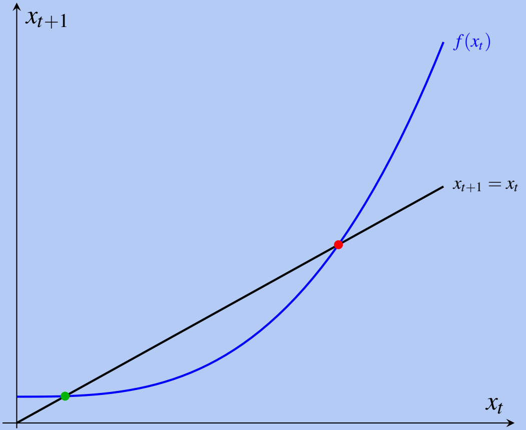
¿Cuántos puntos fijos tenemos?



Ejemplo (Estabilidad local)

Tenemos dos puntos fijos, el rojo y el verde, como en el gráfico.

¿Cómo son estos puntos? El punto rojo no es localmente estable, mientras que el verde es localmente estable. ¿Es este último punto globalmente estable? ¡No! Como el punto rojo no lo es, podemos partir inicialmente a la derecha de ese punto y nunca llegaremos al punto verde.

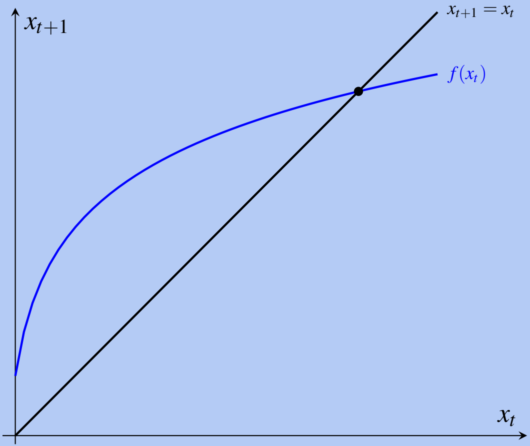


Ejemplo (Estabilidad global)

En el ejemplo gráfico que revisamos antes teníamos un único punto fijo

¿Es localmente estable? Sí, la función f corta a la recta de forma acostada.

¿Es globalmente estable? Si, si miramos con detención, desde donde partamos nos acercaremos al punto fijo.



Ejercicio (Estabilidad)

Considere la siguiente EeDL de primer orden

$$x_{t+1} = ax_t + b$$

Determine para qué valores de a el punto fijo es localmente estable. Para esos valores, además, determine si es globalmente estable.

Ejercicio (Estabilidad)

En el modelo de Solow con producción Cobb-Douglas, el crecimiento del capital per cápita k_t es tal que

$$k_{t+1} = f(k_t) = \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right) k_t + \left(\frac{s}{1+n}\right) \sqrt{k_t}$$

Donde $\delta \in (0,1)$ es la tasa a la que el capital se "descompone", $n > 0$ es la tasa de crecimiento de la población y $s \in (0,1)$ es la fracción del ingreso que se ahorra.

a) Para $\delta = n = s = 0{,}1$ determine si existen puntos fijos con ayuda de un gráfico.

b) Encuentre explícitamente los potenciales punto fijos. (*Ayuda: Defina* $\hat{k} = \sqrt{k^*}$.)

c) Muestre que $k^* = 0$ no es localmente estable. (*Ayuda: Muestre que* $g(k_t) = f(k_t) - k_t$ *es estrictamente creciente si* k *es pequeño y note que* $g(0) = 0$.)

d) Encuentre qué ocurre con $k^* \neq 0$ cuando δ, n y s aumentan. Explique con sus palabras por qué ocurre esto.

e) Suponga que $s = \delta = 0$. Muestre que el sistema dinámico tiene un único punto fijo que es globalmente estable. Explique por qué pasa esto.

En resumen

- Un punto fijo es un valor en el cual un sistema dinámico se mantiene.
- Esos puntos fijos pueden ser estables o inestables.
- Ahora, queremos encontrar soluciones a EeDL simples.
  - De manera que podamos analizar esos sistemas más completamente.

Ecuaciones en diferencias lineales (EeDL)

Definición (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

Una ecuación en diferencias lineal (EeDL) es la relación

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = g(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

donde g es una función definida para $t \geq t_0$. Además, decimos que

- La ecuación es **homogénea** si $g(t) = 0$ para todo t.
- La ecuación es **no homogénea** si $g(t) \neq 0$.

- La ecuación $x_{t+1} = ax_t + b$ es lineal y no homogénea si $b \neq 0$.

Ejemplo (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

En la PPT pasada, teníamos dos ejemplos de EeDL homogéneas de orden 1:

- El caso sin retiro: $M_{t+1} = 1{,}05M_t$.
- El caso con retiro: $M_{t+1} = 0{,}945M_t$.

Las soluciones de estas ecuaciones eran, en general $M_t = (1{,}05)^t M_0$, para el caso sin retiro y $M_t = (0{,}945)^t M_0$, para el caso con retiro. Es decir, hay una cantidad infinita de soluciones, dependiendo del valor de M_0.

Según el teorema de existencia y unicidad, solo hay una solución para el problema de valores iniciales con $M_0 = 1$, que son $M_t = (1{,}05)^t$ y $(0{,}945)^t$, respectivamente.

Ejemplo (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

Pensemos un segundo en el caso sin retiro, pero con un aporte anual de $\$b$:

$$M_{t+1} = 1{,}05 M_t + b$$

Ahora la ecuación es no homogénea y encontrar todas sus soluciones puede ser difícil. Pero noten que si $M_0 = 0$, entonces podemos obtener la siguiente solución **particular**:

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_1 &= 1{,}05 M_0 + b = b \\
\widehat{M}_2 &= 1{,}05 \widehat{M}_1 + b = (1{,}05 + 1) b \\
\widehat{M}_3 &= 1{,}05 \widehat{M}_2 + b = (1{,}05^2 + 1{,}05 + 1) b \\
&\vdots \\
\widehat{M}_{t+1} &= 1{,}05 \widehat{M}_t + b = \left(1{,}05^t + 1{,}05^{t-1} + \cdots + 1\right) b
\end{aligned}$$

Ejemplo (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

Luego

$$\widehat{M}_{t+1} = \frac{1 - 1{,}05^{t+1}}{1 - 1{,}05} b = \frac{1{,}05^{t+1} - 1}{0{,}05} b$$

Esta es **UNA** solución a la ecuación no homogénea, una **solución particular**. Consideren ahora este sistema dinámico:

$$\widetilde{M}_t = M_t + \widehat{M}_t = (1{,}05)^t M_0 + \frac{1{,}05^{t+1} - 1}{0{,}05} b$$

El cual se forma como la suma de la solución general para la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea. Resulta ser que este sistema dinámico es solución de la ecuación no homogénea.

Ejemplo (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

En efecto, si usamos que $M_{t+1} = 1{,}05M_t$ y que $\hat{M}_{t+1} = 1{,}05\hat{M}_t + b$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{t+1} &= M_{t+1} + \widehat{M}_{t+1} \\ &= 1{,}05M_t + 1{,}05\widehat{M}_t + b \\ &= 1{,}05(M_t + \widehat{M}_t) + b \\ &= 1{,}05\widetilde{M}_{t+1} + b \end{aligned}$$

Ocurre además que el sistema $\widetilde{M}_t$ representa a todas las soluciones posibles de la ecuación no homogénea.

Ejercicio (Ecuación en diferencias lineal, EeDL)

Repita el ejemplo anterior pero aplicado a la situación con retiro. Recuerde que

$$1 + a + \cdots + a^t = \sum_{i=0}^{t} a^i = \frac{1 - a^{t+1}}{1 - a}$$

- El ejemplo anterior nos dejó dos enseñanzas:
  - Sumar soluciones tiene efectos interesantes.
  - Las soluciones de una EeDL no homogénea se escriben como sumas.

- Vamos a formalizar estos resultados a continuación.

- Y en lo que queda del capítulo veremos lo siguiente:
  - EeDL de primer orden con coeficientes constantes.
  - EeDL de segundo orden con coeficientes constantes.

Teorema (Combinaciones lineales de soluciones)

Considere la EeDL homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

Sea x_t una solución y sea $c_1 \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema dinámico $c_1 x_t$ también es solución.

Además, si y_t es otra solución y $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces el sistema dinámico $c_1 x_t + c_2 y_t$ también es solución.

- En el ejemplo de la AFP sin retiro ni aporte, $(1{,}05)^t$ es solución.
  - Entonces, también lo es $(1{,}05)^t c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Teorema (Solución general de la EeDL no homogénea)

Considere la EeDL no homogénea

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = g(t), \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

y sea y_t una solución particular. Sea x_t una solución a la ecuación homogénea asociada,

$$x_{t+k} + a_{k-1}(t)x_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)x_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq t_0$$

Entonces toda solución para la EeDL no homogénea es de la forma $cx_t + y_t$ con $c \in \mathbb{R}$.

- En el ejemplo de la AFP sin retiro pero con aporte, las soluciones eran

$$(1{,}05)^t c + \frac{1{,}05^t - 1}{0{,}05} b$$

EeDL de primer orden

EeDL de primer orden

- En esta parte nos centramos en EeDLs muy particulares:
  - Son de orden 1.
  - Los coeficientes $a_i(t)$ son constantes (no dependen de t).

- La ecuación tipo que revisaremos va a ser

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t \geq 0, \quad a, b_t \in \mathbb{R}$$

  pero partiremos con $b_t = b$ (constante en el tiempo).

- ¿Cuál es la solución general de la ecuación homogénea?

Teorema (EeDL homogéneas de primer orden con coeficientes constantes)

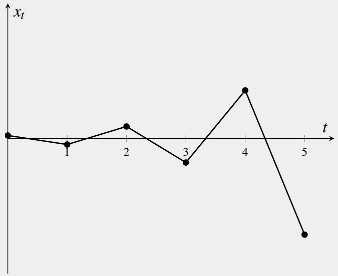
Considere la EeDL homogénea

$$x_{t+1} = ax_t, \qquad t \geq 0$$

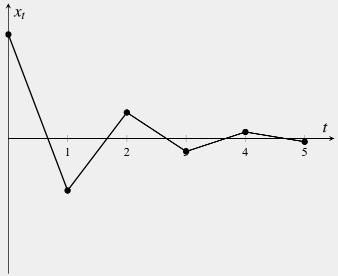
donde $a \in \mathbb{R}$. Entonces toda solución a esta ecuación es de la forma ca^t, con $c \in \mathbb{R}$.

- ¿Qué pasa cuando $a \in (-1,1)$?
  - Ocurre que $x_t \to 0$.
- ¿Qué pasa cuando $a > 1$, con $c \neq 0$?
  - Ocurre que $x_t \to \infty$ si $c > 0$ y $x_t \to -\infty$ si $c < 0$.
- ¿Qué pasa cuando $a < -1$ con $c \neq 0$?
  - Ocurre que x_t cambia de signo y $|x_t| \to \infty$.

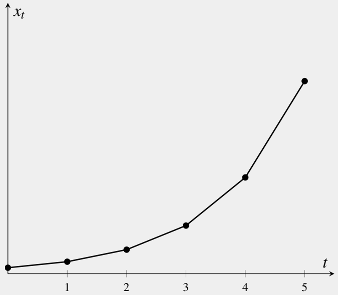
EeDL de primer orden con coeficientes constantes



(a) $a < -1$ y $c > 0$



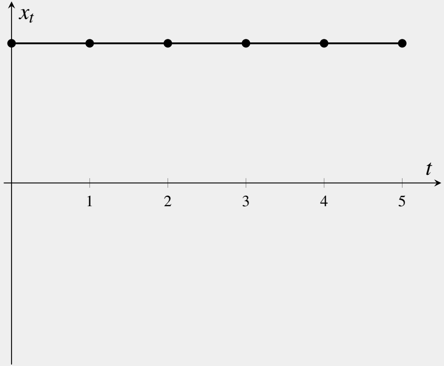
(b) $a \in (-1,0)$ y $c > 0$



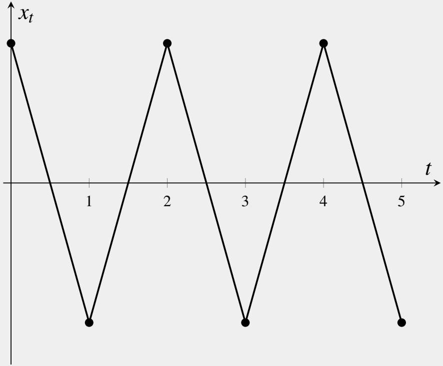
(c) $a > 1$ y $c > 0$

EeDL de primer orden con coeficientes constantes

Cosas curiosas pasan cuando $a = 1$ ó $a = -1$.



(a) $a = 1$ y $c > 0$



(b) $a = -1$ y $c > 0$

Ejercicio (EeDL homogéneas de primer orden con coeficientes constantes)

Considere la EeDL homogénea

$$x_{t+1} = ax_t, \qquad t \geq 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Estudie qué pasa con x_t para el caso $a = 1$. Grafique una solución particular.

- Ahora, pensemos en la ecuación no homogénea, con b constante

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t \geq 0$$

- Según la sección anterior, basta que encontremos una solución particular.

- Una opción es reconstruir el sistema dinámico que parte con $x_0 = 0$.

- En ese caso:

$$x_1 = ax_0 + b = 1b$$
$$x_2 = ax_1 + b = (a + 1)b$$
$$x_3 = ax_2 + b = (a^2 + a + 1)b$$
$$\vdots$$
$$x_t = ax_{t-1} + b = (a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1)b$$

- Luego, si $a \neq 1$

$$x_t = \left(\sum_{i=0}^{t-1} a^i\right) b = \frac{a^t - 1}{a - 1} b$$

- Así, cualquier solución a la EeDL no homogénea

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t \geq 0$$

cuando $a \neq 1$ se ve

$$x_t = ca^t + \frac{a^t - 1}{a - 1} b$$

- En un problema con valores iniciales, c se determina a partir del valor de x_0

$$x_0 = c \cdot a^0 + \frac{a^0 - 1}{a - 1} b = c$$

Ejemplo (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

La cantidad de personas empleadas en el mercado laboral cada año varía de manera conocida. Todos los años se jubila un $10\,\%$ de los empleados y por los egresos universitarios se incorporan 1000 personas al mercado laboral. Se sabe que el 2005 habían 6000 empleados.

Si llamamos L_t a la cantidad de trabajadores en el año t y llamamos $t = 0$ al año 2005, entonces tenemos $L_0 = 6000$ y además L_t verifica la siguiente ecuación en diferencias:

$$L_{t+1} = 0{,}9L_t + 1000$$

Según lo anterior, el número de trabajadores en cualquier año t es

$$L_t = c(0{,}9)^t + \frac{(0{,}9)^t - 1}{0{,}9 - 1}1000 = c(0{,}9)^t + \frac{1 - (0{,}9)^t}{0{,}1}1000$$

Ejemplo (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

Pero la constante c debe ser tal que $L_0 = 6000$. Es decir

$$6000 = L_0 = c(0{,}9)^0 + \frac{1-(0{,}9)^0}{0{,}1}1000 = c$$

Luego $c = 6000$. Así, la solución a este problema de valores iniciales es

$$L_t = 6000(0{,}9)^t + \frac{1-(0{,}9)^t}{0{,}1}1000$$

¿Qué pasa en el largo plazo, cuando $t \to \infty$? En ese caso, $(0{,}9)^t \to 0$ y por lo tanto $L_t \to 10000$.

Ejercicio (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

Para la situación del ejemplo anterior, determine cuántos nuevos egresados debiera haber cada año para que el número de empleados en el largo plazo sea

a) El doble de la cantidad inicial.

b) Igual a la cantidad inicial.

En ambos casos escriba explícitamente el sistema dinámico resultante.

Ejercicio (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

Encuentre la solución general a la EeDL no homogénea con $a = 1$, es decir, encuentre todos los sistemas dinámicos que resuelven

$$x_{t+1} = x_t + b, \qquad t \geq 0$$

Ejercicio (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

Encuentre la solución general a la EeDL no homogénea con $a = -1$, es decir, encuentre todos los sistemas dinámicos que resuelven

$$x_{t+1} = -x_t + b, \qquad t \geq 0$$

Ejercicio (EeDL de primer orden con coeficientes constantes)

Analice qué ocurre cuando $t \to \infty$ con la solución de la EeDL no homogénea

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad t \geq 0$$

con valor inicial $x_0 = c$, en los siguientes casos:

a) $a \in (-1,1)$.

b) $|a| > 1$ (cuidado si a es negativo o positivo).

c) $a = 1$.

d) $a = -1$.

- Ahora queremos analizar un grado más de complejidad: b_t no constante.

- Es decir, vamos a mirar una ecuación del tipo

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t \geq 0, \quad a, b_t \in \mathbb{R}$$

pero b_t no es constante en el tiempo).

- Encontrar soluciones a este tipo de ecuaciones puede ser **DIFÍCIL**.
  - Pero seguiremos un método que nos permite resolver en algunas situaciones.

- Para encontrar una solución particular usaremos un método "trucho".
  - El **método de los coeficientes indeterminados**.
  - O "método del achunte".

- La idea es la siguiente:
  1. Miramos la forma de b_t.
  2. Suponemos un candidato a solución que tiene una cierta forma.
  3. Encontramos los números que hagan que ese candidato sea solución.

- La siguiente tabla resume los casos típicos que veremos en el curso:

b_t	Candidato
ba^t	Aa^t
$\operatorname{sen}(bt)$ ó $\cos(bt)$	$A\operatorname{sen}(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$

- ¿Y si b_t es una combinación de algunas de las opciones?
  - Entonces el candidato es combinación de las soluciones correspondientes.
  - Si $b_t = ct^2 a^t$.
  - La solución particular es $a^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

En mi videojuego favorito existe un sistema de dinero para comprar mejoras. Al final de cada misión t, mi dinero se duplica, pero para dificultad adicional se me descuentan t de mi cuenta. De esto, a medida que completo más misiones, más se me descuenta. Partí el juego con $\$2$. ¿Cómo podemos describir la cantidad de dinero después de cada misión?

Si llamamos D_t al dinero en mi cuenta, la situación anteriormente descrita se puede modelar con la siguiente ecuación en diferencias no homogénea

$$D_{t+1} = 2D_t - t$$

La solución general a la ecuación homogénea la podemos conocer: $D_t = 2^t c$. Nos falta encontrar una solución particular a la ecuación no homogénea.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

De acuerdo a la tabla anterior, como $b_t = -t$, entonces el candidato a solución particular tiene la forma

$$y_t = A_0 + A_1 t$$

Para encontrar qué valores de A_0 y A_1 hacen que este candidato sea efectivamente solución usamos la ecuación:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 2y_t - t \\ A_0 + A_1(t+1) &= 2(A_0 + A_1 t) - t \\ A_0 + A_1 + A_1 t &= 2A_0 + (2A_1 - 1)t \\ (1 - A_1)t + (A_1 - A_0) &= 0 \end{aligned}$$

Esto tiene que valer para todo t, por lo que necesariamente $A_1 = 1$ y $A_1 = A_0$. Así, la solución particular es $y_t = 1 + t$.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Con esto, la solución general a la ecuación

$$D_{t+1} = 2D_t - t$$

Es

$$D_t = 2^t c + 1 + t$$

Como $D_0 = 2$, entonces podemos encontrar el valor de c adecuado para esta situación

$$2 = D_0 = 2^0 c + 1 + 0 = c + 1$$

Luego $c = 1$ y la solución a este problema es

$$D_t = 2^t + 1 + t$$

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Para el ejemplo anterior, ¿qué pasa con el dinero total cuando $t \to \infty$? ¿Y si $D_0 = 1$? Si usted diseñara el juego y no quisiera que el usuario gane mucho dinero rápido, ¿qué cantidad inicial de dinero le daría?

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

1. $x_{t+1} = 0{,}5x_t + t^2$, $x_0 = 2$.
2. $x_{t+1} = 2x_t + 3^t$, $x_0 = 2$.

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Considere una variante del juego. El equipo de desarrolladores considera que es posible controlar el crecimiento del dinero del juego de otra forma. Ahora, al final de cada misión el dinero se triplica y se restarán $2^t t$ de la cuenta. Escriba la ecuación en diferencias correspondiente y encuentre su solución general. Si $D_0 = 1$, ¿qué diferencia encuentra con el caso anterior?

EeDL de segundo orden

EeDL de segundo orden con coeficientes constantes

- Seguiremos con EeDLs de coeficientes constantes, pero de orden 2.
- La ecuación tipo que revisaremos va a ser

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t, \qquad t \geq 0, \quad a_0, a_1, b_t \in \mathbb{R}$$

- Las soluciones a la ecuación homogénea se parecen mucho a las anteriores.

EEDL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

- Supongamos que $x_t = \lambda^t$ es solución de:

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0, \qquad t \geq 0, \quad a_0, a_1, b \in \mathbb{R}$$

- Entonces

$$\lambda^{t+2} + a_1 \lambda^{t+1} + a_0 \lambda^t = 0, \qquad t \geq 0$$

- Lo que se puede reescribir como

$$\lambda^t (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

- La ecuación anterior se debe cumplir para todo t, lo que deja 2 opciones:
    1. $\lambda = 0$.
    2. $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

- La ecuación en 2 se conoce como **ecuación característica**.
    - Esta ecuación siempre tiene solución, si pensamos que $\lambda \in \mathbb{C}$.
    - Pero a veces tiene 2 soluciones: λ_1 y λ_2.

- Pero recordar que si λ_1^t y λ_2^t son soluciones.
    - Entonces todas las combinaciones lineales también lo son.
    - Resultará que esas son todas.

Teorema (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

Considere la EeDL homogénea

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0, \qquad t \geq 0$$

donde $a_1, a_0, \in \mathbb{R}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las dos soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Entonces la solución general de EeDL homogénea es:

1. $c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t t$ si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Además, c_1, c_2 son tales que la solución es un número real para todo t.

EeDL de segundo orden con coeficientes constantes

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y que c_1 ni c_2 son 0:

- ¿Qué pasa cuando $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$?
  - Ocurre que $x_t \to 0$, y cambia de signo si son ambos negativos.
- ¿Qué pasa cuando $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2|$ es más chico (o viceversa)?
  - Ocurre que $|x_t| \to \infty$, y cambia de signo si son ambos negativos.
- ¿Qué pasa cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$?
  - Ocurre que $x_t = c_1 + c_2 t$ y por lo tanto $|x_t| \to \infty$.

EeDL de segundo orden con coeficientes constantes

- Cuando λ_1, λ_2 son complejas decimos que el sistema **oscila**.

- La convergencia o divergencia depende del tamaño de las raíces:
  - Si $|\lambda_1|, |\lambda_2| \in (-1, 1)$, el sistema converge a 0.
  - Si $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, el sistema diverge a ∞ (en valor absoluto).

- Recordar que si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

En el PPT anterior revisamos el ejemplo de los números de Fibonacci, F_t. Teníamos que $F_0 = F_1 = 1$ y

$$F_{t+2} - F_{t+1} - F_t = 0$$

La ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Que tiene como soluciones

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces la solución general de la EeDL es

$$F_t = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Los valores de c_1 y c_2 se obtienen de F_0 y F_1:

$$1 = F_0 = c_1 + c_2$$
$$1 = F_1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De donde

$$c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \qquad c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Ejemplo (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

Notar además que

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62. \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$$

Luego, cuando $t \to \infty$, el término que contiene a λ_1 es el que domina y el que contiene a λ_2 se hace pequeño.

Esto no ocurriría si $c_1 = 0$. Si ese fuera el caso, entonces la solución se iría a 0 cuando $t \to \infty$. Pueden corroborar, mirando el sistema de ecuaciones anterior, que una opción para que esto ocurra sería tomar

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

de manera que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.

Ejercicio (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

Encuentre una fórmula explícita, como la del ejemplo, para los números de Lucas.

Ejercicio (EeDL homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes)

Encuentre la solución general para las siguientes EeDL de segundo orden:

1. $x_{t+2} - 2x_{t+1} + \frac{3}{4}x_t = 0.$
2. $x_{t+2} - 3x_{t+1} - 4x_t = 0.$
3. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0.$
4. $x_{t+2} - x_t = 0.$

Determine además si las soluciones oscilan, y si convergen o divergen cuando $t \to \infty$. (*Ayuda: Puede ser que necesite ponerse en varios casos para las constantes c_1 y c_2. Ocupe un graficador si le favorece el análisis.*)

Ejercicio (Estabilidad)

Considere la siguiente EeDL de segundo orden

$$x_{t+2} - x_{t+1} + ax_t = 0$$

con $a \neq 0$. Muestre que si $0 < a < \frac{1}{4}$, el punto fijo encontrado es globalmente estable.

- Para resolver la EeDL no homogénea necesitamos una solución particular.
- Como vimos antes, este problema es **DIFÍCIL**.
- Pero podemos seguir el mismo método de los coeficientes indeterminados.

- La siguiente tabla resume los casos típicos que veremos en el curso:

b_t	Candidato
ba^t	Aa^t
$\text{sen}(bt)$ ó $\cos(bt)$	$A\,\text{sen}(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$

- ¿Y si b_t es una combinación de algunas de las opciones?
  - Entonces el candidato es combinación de las soluciones correspondientes.
  - Si $b_t = ct^2 a^t$.
  - La solución particular es $a^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Volvamos al ejemplo del videojuego. Ahora, se pensó en la siguiente dinámica para el dinero:

$$D_{t+2} - D_{t+1} + \frac{3}{16} D_t = t$$

Para la ecuación homogénea, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{16} = 0$$

Que se puede escribir

$$\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda - \frac{3}{4}\right) = 0$$

De manera que la solución general a la ecuación homogénea es $c_1 \left(\frac{1}{4}\right)^t + c_2 \left(\frac{3}{4}\right)^t$.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Para encontrar la solución a la ecuación no homogénea, seguimos el mismo procedimiento de antes. Como $b_t = t$, entonces el candidato a solución particular es

$$y_t = A_0 + A_1 t$$

Y para encontrar A_0 y A_1 usamos la ecuación:

$$\begin{aligned} y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{3}{16} y_t &= t \\ A_0 + A_1(t+2) - (A_0 + A_1(t+1)) + \frac{3}{16}(A_0 + A_1 t) &= t \\ \left(\frac{3}{16}A_1 - 1\right) t + \left(A_1 + \frac{3}{16}A_0\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

De aquí, $A_1 = \frac{16}{3}$ y $A_0 = -\frac{256}{9}$. Luego, la solución particular a esta ecuación es

$$y_t = \frac{16}{3}t - \frac{256}{9}$$

Y por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$D_t = c_1\left(\frac{1}{4}\right)^t + c_2\left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{16}{3}t - \frac{256}{9}$$

Notar que cuando $t \to \infty$, los primeros dos términos convergen a 0 y lo más importante son los últimos dos términos.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Supongamos que la desarrolladora quiere eliminar el primer término. Para ello debe escoger D_0 y D_1 tales que $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$. Sin embargo, está segura que quiere $D_0 = \frac{44}{9}$. Entonces ocurre que

$$\frac{44}{9} = D_0 = 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 + c_2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{16}{3} \cdot 0 - \frac{256}{9} = c_2 - \frac{256}{9}$$

Luego $c_2 = \frac{300}{9}$. Eso significa que D_1 tiene que ser

$$D_1 = 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \frac{300}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \frac{16}{3} \cdot 1 - \frac{256}{9} = \frac{225}{9} + \frac{16}{3} - \frac{256}{9} = \frac{17}{9}$$

Así, la solución general es

$$D_t = \frac{280}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{16}{3} t - \frac{256}{9}$$

Ejercicio (EeDL de segundo orden no homogénea)

Suponga ahora que la desarrolladora no quiere eliminar el término $c_1\left(\frac{1}{4}\right)^t$, sino que el término $c_2\left(\frac{3}{4}\right)^t$, pero quiere mantener $D_0 = \frac{44}{9}$.

a) Compare el valor obtenido para c_1 en este caso con el obtenido para c_2 con el ejemplo. Explique con sus palabras por qué ocurre esto.

b) Compare los valores de D_1 en ambos casos. Explique con sus palabras. por qué ocurre esto.

c) Calcule el primer valor de t para el cual cada término exponencial es menor que 10^{-6}. Calcule el valor de D_t en cada caso.

d) Si la idea es incluir estos términos exponenciales para ayudar al jugador solo en las primeras misiones del juego, ¿qué opción prefiere, la del ejemplo o esta?

Ejercicio (EeDL de segundo orden no homogénea)

Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales, con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$:

1. $x_{t+2} - 2x_{t+1} + \frac{3}{4}x_t = 3$.
2. $x_{t+2} - 3x_{t+1} - 4x_t = 2t$.
3. $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 2^t$.
4. $x_{t+2} - x_t = t + 1$.

Determine además si las soluciones oscilan, y si convergen y/o divergen cuando $t \to \infty$.

Ejercicio (EeDL de segundo orden no homogénea)

Considere la siguiente ecuación en diferencias homogénea:

$$x_{t+2} - x_{t+1} + a x_t = 0, \qquad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Determine para qué valores de a la solución ecuación característica tiene:

a) Dos soluciones reales distintas.

b) Dos soluciones reales iguales.

c) Dos soluciones complejas.

Determine además para qué valores de a se tiene que la solución oscila, y para cuales converge o diverge cuando $t \to \infty$.

Ejercicio (EeDL de segundo orden no homogénea)

Ahora, considere la siguiente ecuación en diferencias no homogénea:

$$x_{t+2} - x_{t+1} + a x_t = b^t, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$$

Y suponga que a es tal que la solución general a la ecuación homogénea converge a 0 cuando $t \to \infty$. Encuentre la solución general de esta ecuación y encuentre valores iniciales para que la solución converja a 0 en los casos

a) $b > 1$.

b) $b \in (0,1)$.

Bonus track:
Puntos fijos y soluciones a EeDL

Bonus track: Puntos fijos y soluciones a EeDL

- Para cerrar, un dato adicional sobre los puntos fijos.
- Son útiles para presentar soluciones a EeDL de primer y segundo orden.
- El siguiente resultado puede ayudar a ahorrar algo de tiempo.

Propiedad (Punto fijo y soluciones a EeDL)

Suponga que x_t es solución a alguna de las siguientes EeDL

$$x_{t+1} = ax_t + b \tag{1}$$

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b \tag{2}$$

y suponga que x^* es un punto fijo de x_t. Entonces,

- Si x_t resuelve (1), $x_t = a^t(x_0 - x^*) + x^*$.
- Si x_t resuelve (2), entonces $x_t = \tilde{x}_t + x^*$, donde $\tilde{x}_t$ es solución a la versión homogénea de (2).